ВИБРАНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ЩОДО ЗМІСТОВОГО МОДУЛЯ № 1 «ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ»

Тема 1. Основи диференціального числення	• Диференціал функції однієї змінної. • Частинні похідні і диференціали функції двох і більше змінних. • Повний диференціал.

Похідна функції, її геометричний та механічний зміст

Похідною y' від визначеної та неперервної в околі деякої точки x_0 функції $y=f(x)$ по аргументу x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу нескінченно малий ($\Delta x \to 0$), тобто

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована, то згідно з означенням похідної її приріст Δy можна подати у вигляді граничного значення y' і нескінченно малої величини α, яка містить Δx і зникає при $\Delta x \to 0$, тобто

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Головна частина приросту функції Δy, що дорівнює добутку похідної y' на приріст аргументу Δx, називається диференціалом функції dy:

$$dy = y'\Delta x.$$

Можна сказати, що **диференціал** dy – це лінійна частина приросту функції, оскільки добуток $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – величина нелінійна відносно Δx.

Диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту $dx = \Delta x$.

Диференціал функції дорівнює добутку похідної функції на диференціал незалежної змінної:

$$dy = y'dx.$$

Геометричний зміст похідної функції полягає в тому, що значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута α нахилу дотичної до графіку функції в даній точці, тобто $y'=\mathrm{tg}\alpha$.

Іншими словами, значення похідної y' в точці x_0 є кутовим коефіцієнтом рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці x_0, y_0, а саме рівняння дотичної має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Поняття похідної може отримати **механічний зміст** при розгляді миттєвої швидкості υ нерівномірного руху, обчислення якої здійснюється за формулою

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'.$$

Миттєва швидкість υ є похідною від переміщення S по часу t.

Таблиця похідних деяких елементарних функцій

1.	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in R$	8.	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
2.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, a \neq 1$	9.	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
3.	$(e^x)' = e^x$	10.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$	11.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	12.	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
6.	$(\sin x)' = \cos x$	13.	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
7.	$(\cos x)' = -\sin x$		

Правила обчислення похідних

Якщо c – деяка константа, а $u=u(x)$ та $v=v(x)$ – деякі диференційовані функції незалежної змінної x, то справедливі наступні правила:

1) $(c)' = 0$

2) $(x)' = 1$

3) $(cu)' = cu'$

4) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

5) $(uv)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2} \qquad (v \neq 0)$;

7) $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c\cdot v'}{v^2} \qquad (v \neq 0)$

Похідна складеної функції

Нехай функція $u(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $y=f(u)$ - в точці $u_0=u(x_0)$. Тоді складена функція $y=f[u(x)]$ також має похідну в точці x_0 і при цьому

$$y'(x_0) = f_u'(u_0)\cdot u_x'(x_0).$$

Дослідження функції за допомогою похідної

Інтервали зростання та спадання функції називаються її інтервалами монотонності.

Точка x_0 називається **точкою максимуму** функції $y=f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, в якому виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ при $x\neq x_0$, і **точкою мінімуму**, якщо в деякому її околі $f(x) > f(x_0)$ при $x\neq x_0$.

Точки максимуму та мінімуму функції називаються її **точками екстремуму**.

Умовою монотонності функції є наступне. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна та диференційована на інтервалі $(a;b)$, тобто $a \le x \le b$. Тоді якщо $f'(x) > 0$ для всіх $x\in(a,b)$, то функція зростає на зазначеному інтервалі, а якщо $f'(x) < 0$ для всіх $x\in(a,b)$, то функція спадає на зазначеному інтервалі.

Необхідна умова існування екстремуму є наступне. Якщо диференційована в деякому інтервалі $(a;b)$ функція має в точці $x_0\in(a;\ b)$ екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$.

Достатня умова існування екстремуму є наступне. Якщо похідна функції $f(x)$ перетворюється в нуль у точці x_0 і при переході через цю точку в напрямку зростання x змінює знак "плюс" ("мінус") на "мінус" ("плюс"), то в точці x_0 ця функція має максимум (мінімум). Якщо ж похідна функції при переході через точку x_0 не змінює знака, то в цій точці екстремум функції $f(x)$ відсутній.

Побудова графіків функцій

Повне дослідження функції для побудови її графіку включає наступні пункти (наведений порядок може змінюватись):

1. Дослідження області визначення функції, інтервалу неперервності, точок розриву.
2. Перевірка функції на парність і періодичність.
3. Визначення точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Визначення асимптот графіка функції.
5. Визначення інтервалів монотонності та точки екстремуму.
6. Визначення інтервалів опуклості, угнутості та точок перегину.

За отриманими даними будується графік функції.

Частинні похідні і диференціали функції декількох змінних

Розглядатимемо функцію двох незалежних змінних $z = f(x,\ t)$. Зафіксуємо $t = t_0$, тоді z – функція лише однієї змінної x. Її приріст Δz дорівнює:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ t_0) - f(x_0,\ t_0).$$

Утворимо відношення $\dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ та знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, t_0) - f(x_0, t_0)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x'(x,t).$$

Ця величина називається **частинною похідною** від функції $z = f(x,\ t)$ за змінною x у точці $(x_0,\ t_0)$. Відповідно, частинна похідна за змінною t у цій точці дорівнює:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x_0, t_0+\Delta t) - f(x_0, t_0)}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial t} = z_t'(x,t).$$

Будемо вважати, що функція $z = f(x,\ t)$ має частинну похідну $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ в околі деякої точки M. Якщо при цьому існує частинна похідна по t від $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, то її називають змішаною частинною похідною в точці M:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Справедливе співвідношення:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Якщо похідну беруть двічі по одній і тій же змінній, то її позначають:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Повний диференціал

Розглянемо $u = f(x, y, z)$ – функцію трьох незалежних змінних, яка є визначеною і диференційованою у деякому інтервалі.

Головна, лінійна відносно Δx, Δy, Δz, частина приросту функції називається **повним диференціалом** du функції трьох змінних:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz.$$

Інакше кажучи, повний диференціал функції дорівнює сумі її частинних диференціалів.

Тема 2. Основи інтегрального числення	• Невизначений і визначений інтеграли. • Інтегрування методом заміни змінної та частинами.

Первісна та невизначений інтеграл

Задача інтегрального числення полягає в знаходженні функції $F(x)$ за її похідною $F'(x) = f(x)$ чи за її диференціалом $f(x)dx$.

Функція $F(x)$ називається **первісною** чи інтегралом для даної функції $f(x)$, якщо для всіх x з області визначення функції виконуються рівності $F'(x) = f(x)$, або $dF(x) = f(x)dx$.

Будь-яка неперервна функція $f(x)$ має безмежну кількість первісних, що відрізняються тільки на сталу величину C. Тому, якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то будь–яка інша може бути представлена виразом $F(x) + C$.

Сукупність усіх первісних $F(x) + C$ для даної функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$.

Символ невизначеного інтеграла: $\int f(x)dx$. Згідно з означенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $\int$ – знак інтегралу, x – змінна інтегрування.

Обчислення інтегралу від заданої функції називається інтегруванням даної функції.

Таблиця деяких невизначених інтегралів

1.	$\int 0 \cdot dx = c$
2.	$\int dx = x + c$
3.	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + c, \quad x \neq 0$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1$